



UNIVERSIDADE FEDERAL DE SÃO JOÃO DEL-REI  
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

Matheus Claudino Pereira

# PROPRIEDADES GLOBAIS DAS CURVAS PLANAS

São João del-Rei - MG  
2019

Matheus Claudino Pereira

## PROPRIEDADES GLOBAIS DAS CURVAS PLANAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Matemática, da Universidade Federal de São João del-Rei, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Ivana de Vasconcellos Latosinski

São João del-Rei, 17 de dezembro de 2019

Banca Examinadora

---

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Ivana de Vasconcellos Latosinski

---

Prof. Dr. Arnulfo Miguel Rodríguez Peña

---

Prof. Dr. Waliston Luiz Lopes Rodrigues Silva

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente, à professora Ivana pela orientação na execução deste trabalho, pela amizade, pelos conselhos e conversas e por possibilitar que eu evoluísse pessoal e profissionalmente;

Agradeço muito à minha namorada, Ana Luiza, pelo companheirismo, conselhos, confiança e paciência nas horas difíceis;

À minha mãe, Márcia, por me apoiar em minhas decisões e por me ensinar à trilhar bons caminhos na vida;

Aos meus irmãos, Luís Antônio, João Marcos e Laís por apoiarem e acreditarem nos meus sonhos;

Aos meus familiares por me apoiarem com grande entusiasmo;

Aos meus colegas de turma, especialmente Marcelo e Ariadne que, muitas vezes, foram meus portos-seguros no caminho árduo e complexo da matemática;

Aos meus amigos de infância, Eduardo, Luís Filipe, Guilherme, Júlio, Kevyn e Alan que, apesar da distância, nunca me deixaram só e sempre acreditaram no meu potencial;

Agradeço também meus amigos de república, que compartilharam comigo meus piores e melhores dias como estudante;

À Pró-Reitoria de Assistência Estudantil e seus funcionários por me acolherem e possibilitarem minha permanência na universidade, sem tal acompanhamento eu jamais teria conseguido chegar onde cheguei;

Por fim, agradeço imensamente a Universidade Federal de São João del-Rei, especialmente os professores do curso de Matemática que participaram ativamente na minha vida, me ensinando atitudes morais e éticas, além dos ensinamentos matemáticos e sobre a importância de ser professor.

*E o caminho da felicidade ainda existe, é uma trilha estreita é em meio à selva triste.*

*(Racionais Mc's, Vida Loka - Parte 2)*

# Resumo

A geometria diferencial moderna estuda a influência das propriedades locais no comportamento de toda a curva ou superfície (teoria global de curvas e superfícies) e estende o estudo aos espaços não euclidianos e variedades de qualquer dimensão, baseando-se ainda, no entanto, nos métodos do cálculo diferencial e integral. Estudaremos alguns resultados que pertencem a geometria diferencial global das curvas planas. Dedicaremos nossos esforços, especialmente, à três teoremas: i) A desigualdade isoperimétrica; ii) O Teorema dos quatro vértices e; iii) A Fórmula de Cauchy-Crofton.

**Palavras-chave:** Geometria Diferencial, Curvas Planas, Teoria Global, Desigualdade Isoperimétrica, Teorema dos Quatro Vértices, Cauchy-Crofton.

# Abstract

Modern differential geometry studies the influence of local properties on the behavior of the entire curve or surface (global theory of curves and surfaces) and extends the study to non-Euclidean spaces and varieties of any size, but is still based on methods of differential and integral calculus. We will study some results that belong to the global differential geometry of the flat curves. We will focus our efforts especially on three theorems: i) Isoperimetric Inequality; ii) The four vertex theorem and; iii) The Cauchy-Crofton Formula.

**Keywords:** Differential Geometry, Flat Curves, Global Theory, Isoperimetric Inequality, Four Vertex Theorem, Cauchy-Crofton.

# Sumário

Introdução	7
1 Conceitos Iniciais	8
2 A Desigualdade Isoperimétrica	12
3 O Teorema dos Quatro Vértices	19
4 A Fórmula de Cauchy-Crofton	27
Considerações Finais	34
Referências Bibliográficas	35

# Introdução

Com o advento do cálculo infinitesimal de Gottfried Wilhelm von Leibniz e Isaac Newton (sec. XVII), inúmeros problemas que eram antes insolúveis se desfizeram com auxílio da nova ferramenta matemática. Uma aplicação do cálculo infinitesimal, situada no campo da geometria, é o estudo de propriedades de curvas e superfícies em vizinhanças próximas de um ponto, ramo da matemática chamada de geometria diferencial local. Outro ramo da geometria, chamado de geometria diferencial global, estuda as propriedades da estrutura total das curvas e superfícies que derivam de certas propriedades locais.

A geometria diferencial teve um grande avanço como novo ramo da matemática com *Disquisitiones generales circa superficies curvas* de Carl Friedrich Gauss, mas teve contribuições de grandes matemáticos como Leonhard Euler e Gaspard Monge (estudos analíticos de superfícies), Pierre de Fermat e René Descartes (estudos sobre tangentes em curvas no plano), Christiaan Huygens (estudos de curvatura e curvas evolutas) e outros. De certo modo, dedica-se a Gauss, o desenvolvimento da geometria diferencial moderna, pelo tratamento que foi dado por ele às curvas e superfícies por meio de representações paramétricas.

Neste trabalho analisaremos alguns dos resultados clássicos da geometria diferencial global das curvas planas. O primeiro capítulo foi dedicado às noções iniciais e definições necessárias ao nosso estudo. No segundo capítulo apresentamos um estudo sobre a Desigualdade Isoperimétrica. No terceiro capítulo falamos sobre o Teorema do Índice de Rotação e o Teorema dos Quatro Vértices. Por fim, o quarto capítulo foi dedicado ao estudo da Fórmula de Cauchy-Crofton.

Para a consulta referente à parte histórica foram analisados [2], [4] e [7].

# Capítulo 1

## Conceitos Iniciais

Inicialmente precisamos estabelecer algumas definições que permeiam o estudo sobre a geometria diferencial das curvas planas. Para este capítulo nos baseamos em [8], [3] e [5]. Para as definições sobre medida usamos [1].

**Definição 1** (Curva Plana Parametrizada Diferenciável). *Uma Curva plana parametrizada diferenciável é uma aplicação  $\alpha$  de classe  $C^\infty$  de um intervalo aberto  $I \subset \mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^2$ .*

Ou seja, uma curva diferenciável do plano é uma aplicação  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  que para cada parâmetro  $t \in I$  associa  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$  em que as funções  $x(t)$  e  $y(t)$  são diferenciáveis de classe  $C^\infty$ .

**Definição 2** (Curva Regular). *Uma curva  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizada diferenciável é dita regular se  $\forall t \in I$  temos que  $\|\alpha'(t)\| \neq 0$ .*

Dada uma curva  $\alpha$  qualquer, chamamos de traço o conjunto dos pontos da imagem da aplicação  $\alpha$ . Então podemos nos referir à representação gráfica da curva como o traço da curva  $\alpha$ . Além disso, esse traço possui um sentido de percurso que chamamos de orientação.

É importante estabelecer uma relação entre a variação do parâmetro e o comprimento da curva. Temos que dada uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ , seu comprimento de arco de  $t_0$  a  $t_1$  é dado por

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt.$$

A aplicação  $s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt$  é denominada função comprimento de arco da curva a partir de  $t_0$ . Como  $\alpha$  é regular, temos que a função  $s(t)$  é diferenciável de classe  $C^\infty$ .

**Definição 3** (Curva Parametrizada por Comprimento de Arco). *Uma curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  é dita parametrizada por comprimento de arco se, para cada  $t_0, t_1 \in I, t_0 \leq t_1$ , o comprimento de arco de  $\alpha$  de  $t_0$  a  $t_1$  é igual a  $t_1 - t_0$ . Isto é,*

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt = t_1 - t_0.$$

**Observação 1.** *Nem sempre uma curva  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  regular está parametrizada por comprimento de arco, mas um fato interessante é que é sempre possível conseguir um difeomorfismo  $h$ , cuja imagem é o conjunto  $I$ , tal que  $\alpha \circ h$  é uma curva parametrizada por comprimento de arco e tem o mesmo traço de  $\alpha$ . Chamamos a função  $h$  de mudança de parâmetro.*

**Definição 4** (Referencial de Frenet). *Seja  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva regular parametrizada por comprimento de arco. O vetor unitário  $t(s) = \alpha'(s) = (x'(s), y'(s))$  é chamado vetor tangente de  $\alpha$  em  $t$ . Chamamos de vetor normal o vetor unitário  $n(s) = (-y'(s), x'(s))$ . Como a curva está parametrizada por comprimento de arco, esses vetores são unitários e ortogonais. O conjunto composto pelos vetores tangente e normal é denominado Referencial de Frenet no plano.*

**Definição 5** (Curvatura). *Dada uma curva regular  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  parametrizada por comprimento de arco, podemos definir a curvatura de  $\alpha$  em  $s$  como o fator de proporcionalidade  $k(s)$  que existe entre a derivada do vetor tangente e o vetor normal, isto é,  $t'(s) = k(s) \cdot n(s)$ . Portanto  $k(s) = t'(s) \cdot n(s)$ .*

**Definição 6** (Curva fechada). *Curva plana fechada é uma curva parametrizada regular  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\alpha$  e todas suas derivadas coincidem em  $a$  e  $b$ ; isto é,*

$$\alpha(a) = \alpha(b), \alpha'(a) = \alpha'(b), \alpha''(a) = \alpha''(b), \dots$$

**Definição 7** (Curva Simples). *Diz-se  $\alpha$  é curva simples se  $\alpha$  não possui auto-intersecções. No caso das curvas fechadas  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  (que já possuem uma auto intersecção nos extremos), dizemos que esta é simples se não possui outras auto-intersecções.*

**Definição 8** (Curva Convexa). *Uma curva plana regular (não necessariamente fechada)  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é convexa se, para todo  $t \in [a, b]$ , o traço  $\alpha([a, b])$  de  $\alpha$  está totalmente contido em um lado do semi-plano determinado pela reta tangente em  $t$ .*

Outras definições importantes, para o desenvolvimento de um dos resultados abordados nesse trabalho, são os conceitos de homotopia e medida.

**Definição 9** (Homotopia). *Duas funções contínuas  $f, g : X \rightarrow Y$  entre espaços topológicos dizem-se homotópicas se existir uma aplicação contínua  $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  onde  $F_0 = f$  e  $F_1 = g$ , onde  $F_t = F|_{X \times \{t\}}$ .*

**Definição 10** ( $\sigma$ -Álgebra). *Uma família  $F$  de subconjuntos de  $X$  é dita ser uma  $\sigma$ -Álgebra se:*

- i.  $X \in F$ ;
- ii. se  $A \in F$  então o complementar  $A^C \in F$ ;
- iii. se  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de subconjuntos de  $F$ , então a união enumerável  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$ .

**Definição 11** (Medida). *Uma medida é uma função  $\mu : F \rightarrow \mathbb{R}^+$ , onde  $F$  é uma  $\sigma$ -Álgebra de subconjuntos de um conjunto  $X$ , tal que :*

- i.  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
- ii.  $\mu(E) \geq 0 \forall E \in F$ ;
- iii. *Aditividade Enumerável: A medida de uma união disjunta enumerável é igual à série de todas as medidas de cada subconjunto, isto é,*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k).$$

Por fim, antes de iniciarmos com o primeiro teorema principal deste trabalho, enunciaremos, sem demonstrar, dois teoremas que serão de grande valia, para mais detalhes sobre estes consultar [5].

**Teorema 1** (Teorema da Função Inversa). *Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  é de classe  $C^k$ ,  $k \geq 1$  no aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Se  $\alpha \in U$  é tal que  $f'(\alpha) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é invertível então existe uma bola aberta  $B = B(\alpha; \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x - \alpha\| < \delta\} \subset U$  tal que restrição  $f|_B$  é um difeomorfismo sobre um aberto  $V \ni f(\alpha)$*

**Definição 12.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável em  $[a, b]$ . Um ponto crítico de  $f$  é um ponto  $c \in [a, b]$  tal que  $f'(c) = 0$ . O ponto crítico  $c$  chama-se não-degenerado quando  $f''(c)$  existe e é diferente de zero.*

**Teorema 2.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma função suave. Então os pontos críticos não degenerados de  $f$  são isolados no conjunto dos pontos críticos.*

Assim estamos prontos para discutirmos os resultados deste trabalho.

## Capítulo 2

# A Desigualdade Isoperimétrica

Para este capítulo consultamos [5], [3], [6] e [7].

Um questionamento muito pertinente, quando se trata do cálculo de área de figuras planas, é: Dentre todas as curvas simples fechadas no plano com um dado comprimento  $l$ , qual delas limita a maior área? Esse problema foi muito discutido desde a Grécia Antiga. Um mito que descreve bem esse problema, citado em [7], conta que no século IX a.c. uma princesa chamada Dido, em um acordo na compra de terras, teria negociado com o dono das terras que poderia adquirir um terreno que conseguisse cercar com o couro de apenas um boi, então conta-se que Dido teria, junto com seus seguidores, cortado o couro em longas tiras finas e cercado uma área semi-circular, mostrando assim um certo conhecimento sobre o chamado Problema Isoperimétrico.

Afim de explorarmos esse problema, com as ideias da geometria diferencial, precisamos do seguinte teorema.

**Teorema 3.** *Seja  $A$  a área de uma região limitada por uma curva  $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ , com curvatura não identicamente nula, onde  $t \in [a, b]$  é um parâmetro arbitrário, então:*

$$A = - \int_a^b y(t)x'(t)dt = \int_a^b x(t)y'(t)dt = \frac{1}{2} \int_a^b (x(t)y'(t) - y(t)x'(t))dt \quad (1)$$

*Demonstração.* Provaremos a primeira fórmula em (1). Primeiro pelo caso particular, onde a curva é formada de dois segmentos de retas paralelas ao eixo  $Oy$  e por dois arcos escritos na forma  $y = f_1(x)$  e  $y = f_2(x)$ ;  $x \in [x_0, x_1]$ ,  $f_1 > f_2$  conforme mostra a Figura 1.

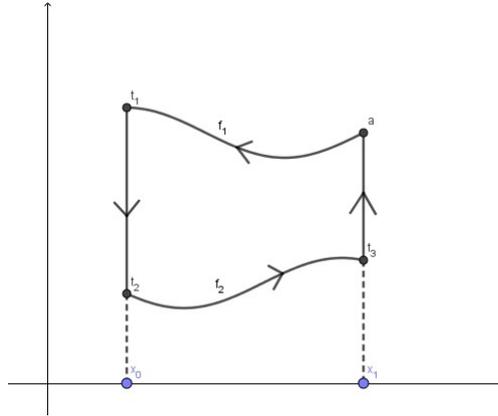


Figura 2.1: Caso Particular, [3]

A região limitada pela curva tem área

$$A = \int_{x_0}^{x_1} f_1(x)dx - \int_{x_0}^{x_1} f_2(x)dx.$$

Como  $f_1(x) = y$ , parametrizando este arco temos que  $f_1(x(t)) = y(t)$  e  $dx = x'(t)dt$ . Analogamente, verifica-se para  $f_2(x) = y$  que  $f_2(x(t)) = y(t)$  e  $dx = x'(t)dt$ . Além disso, como  $x_1 > x_0$  e a curva tem orientação positiva, obtemos que

$$A = - \int_a^{t_1} y(t)x'(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt - \int_{t_2}^{t_3} y(t)x'(t)dt + \int_{t_3}^b y(t)x'(t)dt.$$

Mas de  $t_1$  a  $t_2$  e de  $t_3$  a  $a = b$  temos  $x'(t) = 0$ . Logo

$$A = - \int_a^{t_1} y(t)x'(t)dt - \int_{t_2}^{t_3} y(t)x'(t)dt.$$

E portanto

$$A = - \int_a^b y(t)x'(t)dt.$$

Para o caso geral, considere uma curva fechada simples  $C$ . É possível verificar que conseguimos dividir a região limitada pela curva em um número finito de regiões como no caso particular. Observe a Figura 2.

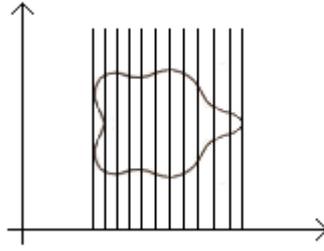


Figura 2.2: Caso Geral

De fato, pelo Teorema da Função Inversa, podemos parametrizar a curva  $\alpha$  localmente na forma  $\alpha(t) = (\rho(t), t)$ . Desse modo,  $\alpha'(t) = (\rho'(t), 1)$ . Perceba que um ponto crítico da função  $\rho$ , isto é,  $\rho'(t) = 0$ , é um ponto que faz com que o vetor tangente de  $\alpha$  seja paralelo ao eixo coordenado  $y$ . Além disso, a curvatura de  $\alpha$  no ponto  $y$  é  $k(t) = |\alpha''(t)| = |\rho''(t)|$ . Tomando o polinômio de Taylor de  $\alpha$  entorno de  $t_0$ :

$$P_\alpha(t_0) = \left( \rho(t_0) + \rho'(t_0)(t - t_0) + \frac{\rho''(t_0)}{2}(t - t_0)^2 + \dots, t_0 + 1(t - t_0) \right).$$

Suponha, por absurdo, que  $\rho$  tenha infinitos pontos críticos em um intervalo  $[a, b]$ . Vamos pedir que a curvatura  $k \neq 0$  não se anule em nenhum intervalo, e com isso temos que os pontos críticos são não degenerados, o que implica que esses pontos são isolados. Então temos uma sequência de pontos isolados num compacto, o que é impossível, pois toda sequência definida num compacto têm uma subsequência convergente. Então os pontos dessa sequência não podem ser isolados e, portanto,  $\rho$  não pode ter infinitos pontos críticos. Isto implica que dada uma curva fechada simples qualquer, como  $k \neq 0$ , podemos subdividi-la em um número finito de regiões do tipo explorado no caso particular. Para utilizar este argumento, basta pedir que a curvatura não se anule nem nenhum intervalo, pois caso a curvatura se anule em um ponto crítico do argumento basta considerar uma pequena modificação do eixo vertical e assim obter outra divisão da curva evitando a curvatura nula. Uma outra demonstração deste teorema pode ser obtida pelo Teorema de Green, [3].

A segunda fórmula em (1) pode ser obtida da primeira:

$$\begin{aligned} \int_a^b x(t)y'(t)dt &= \int_a^b (x(t)y(t))'dt - \int_a^b x'(t)y(t)dt \\ &= x(t)y(t)\Big|_a^b - \int_a^b x'(t)y(t)dt \\ &= [x(b)y(b) - x(a)y(a)] - \int_a^b x'(t)y(t)dt. \end{aligned}$$

Como a curva em questão é fechada e seus extremos são os valores  $a$  e  $b$ , temos que as coordenadas coincidem nestes pontos, ou seja,  $x(a) = x(b)$  e  $y(a) = y(b)$  e ainda  $[x(b)y(b) - x(a)y(a)] = 0$ , portanto

$$\int_a^b x(t)y'(t)dt = [x(b)y(b) - x(a)y(a)] - \int_a^b x'(t)y(t)dt = - \int_a^b x'(t)y(t)dt.$$

E a terceira fórmula em (1) é obtida somando-se as duas primeiras e dividindo essa soma por 2.

□

Agora podemos enunciar o teorema central deste capítulo que afirma que qualquer curva fechada de comprimento  $l$  cerca uma área menor ou igual a  $\frac{l^2}{4\pi}$  e que este valor só é atingido se a curva for um círculo de raio  $\frac{l}{2\pi}$ .

**Teorema 4** (Desigualdade Isoperimétrica). *Seja  $C$  uma curva plana, simples e fechada com comprimento  $l$ , e seja  $A$  a área da região limitada por  $C$ . Então*

$$A \leq \frac{l^2}{4\pi}. \quad (2)$$

*A igualdade vale se e somente se  $C$  é um círculo.*

*Demonstração.* Sejam  $E$  e  $E'$  duas retas paralelas que não intersectam a curva fechada  $C$ . Considere um movimento destas retas até que elas toquem  $C$  pela primeira vez. Obtemos assim duas retas paralelas,  $L$  e  $L'$ , tangentes à curva  $C$ , de modo que  $C$  está totalmente contida na faixa limitada por  $L$  e  $L'$ . Considere agora o círculo  $S^1$  que seja tangente às retas  $L$  e  $L'$  com centro  $O$  e tal que não intersecta  $C$ . Introduza o sistema de coordenadas cartesianas com origem em  $O$  e o eixo  $Ox$  perpendicular a  $L$  e  $L'$ . Parametrize  $C$  pelo

comprimento de arco,  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$  de modo que  $C$  tenha orientação positiva e os pontos de tangência com  $L$  e  $L'$  sejam respectivamente  $s = 0$  e  $s = s_1$ .

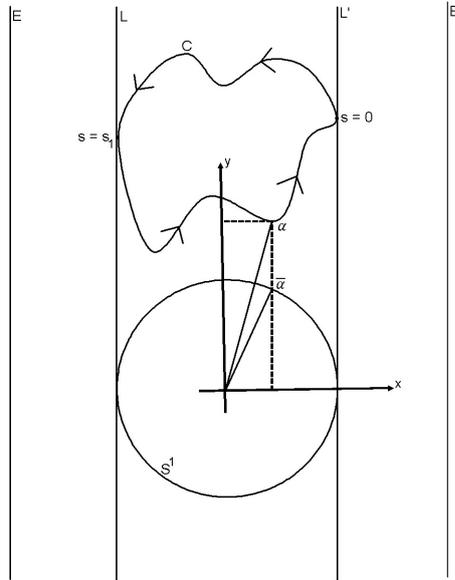


Figura 2.3: Auxílio para a demonstração, [3]

Podemos supor que a parametrização de  $S^1$  é  $\bar{\alpha}(s) = (\bar{x}(s), \bar{y}(s)) = (x(s), \bar{y}(s))$ ,  $s \in [0, l]$ . Utilizando a equação (1) e denotando por  $A$  a área limitada por  $C$  e  $\bar{A}$  a área da região limitada por  $S^1$  temos que

$$A = \int_0^l x(t)y'(t)dt$$

$$\bar{A} = \pi r^2 = - \int_0^l \bar{y}(t)x'(t)dt.$$

Seja  $2r$  a distância de  $L$  até  $L'$ . Assim, utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz,

temos que

$$\begin{aligned}
A + \pi r^2 = A + \bar{A} &= \int_0^l x(s)y'(s)ds - \int_0^l \bar{y}(s)x'(s)ds \\
&= \int_0^l [x(s)y'(s) - \bar{y}(s)x'(s)]ds \\
&= \int_0^l (x'(s), y'(s))(-\bar{y}(s), x(s))ds \\
&\leq \int_0^l |(x'(s), y'(s))(-\bar{y}(s), x(s))| ds \\
&\leq \int_0^l |(x'(s), y'(s))| |(-\bar{y}(s), x(s))| ds \\
&= \int_0^l |\alpha'(s)| |\bar{\alpha}(s)| ds \\
&= \int_0^l |\bar{\alpha}(s)| ds = \int_0^l r ds = rs \Big|_0^l = lr. \tag{3}
\end{aligned}$$

Observemos agora o fato de que a média geométrica de dois números positivos é menor que ou igual à media aritmética destes dois números, e vale a igualdade, se, e somente se, os números são iguais. Daí decorre que

$$\sqrt{A}\sqrt{\pi r^2} \leq \frac{1}{2}(A + \pi r^2) \leq \frac{lr}{2} \tag{4}.$$

e assim

$$\begin{aligned}
\sqrt{A}\sqrt{\pi r^2} \leq \frac{lr}{2} &\iff 2\sqrt{A\pi r^2} \leq lr \\
&\iff \sqrt{4A\pi r^2} \leq lr \\
&\iff 4A\pi r^2 \leq l^2 r^2 \\
&\iff 4A\pi \leq l^2 \\
&\iff l^2 - 4\pi A \geq 0.
\end{aligned}$$

Esta última desigualdade é justamente a desigualdade (2). Precisamos provar agora que se vale a igualdade em (2), então a curva é uma circunferência.

Suponha que vale a igualdade em (2) então vale que  $A = \frac{l^2}{4\pi}$  e substituindo A em (4):

$$\sqrt{A}\sqrt{\pi r^2} = \sqrt{A\pi r^2} = \sqrt{\frac{l^2}{4\pi}\pi r^2} = \sqrt{\frac{l^2 r^2}{4}} = \frac{lr}{2}.$$

A partir do fato de que a média geométrica de dois números é igual a média aritmética destes dois números quando os dois são iguais, segue que  $A = \pi r^2$  e  $l = 2\pi r$ . Em (3) sabemos que a igualdade só se verifica se, e somente se,  $\alpha'$  é um múltiplo de  $\bar{\alpha}$ , isto é

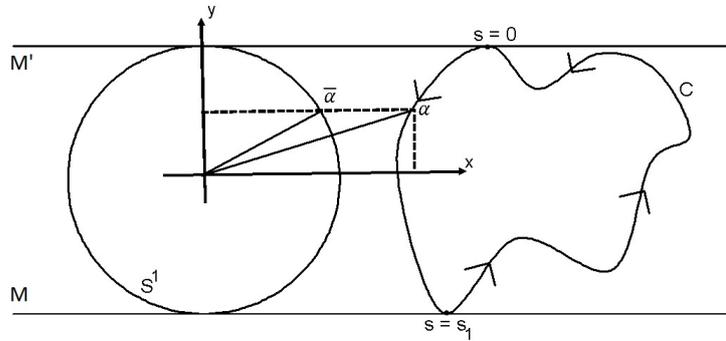
$$\langle \alpha', \bar{\alpha} \rangle = \langle (x', y'), (-\bar{y}, x) \rangle = |(x', y')| |(-\bar{y}, x)| = |\alpha'| |\bar{\alpha}|$$

Como  $|\alpha'| = 1$  e  $|\bar{\alpha}| = r$ , temos

$$\langle \alpha', \bar{\alpha} \rangle = r \iff \bar{\alpha} = r\alpha' \iff \alpha' = \frac{1}{r}\bar{\alpha} \iff (x', y') = \frac{1}{r}(-\bar{y}, x)$$

e isto implica que  $y' = \frac{1}{r}x$ .

Analogamente, podemos construir, de forma semelhante às retas L e L', duas retas M e M', perpendiculares a L e L', e verificar que, com essa nova construção podemos obter  $x' = \frac{1}{r}y$ , conforme figura abaixo:



Portanto, como  $\alpha$  está parametrizada por comprimento de arco, temos

$$1 = (x')^2 + (y')^2 = \frac{1}{r^2}(x^2 + y^2)$$

e assim obtemos que C é um círculo. □

# Capítulo 3

## O Teorema dos Quatro Vértices

Neste capítulo demonstraremos o Teorema dos Quatro Vértices que faz uma afirmação sobre os vértices de uma curva. Para isto, a consulta primordial foi [3].

**Definição 13.** *Um vértice de uma curva plana regular  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é um ponto  $t \in [a, b]$  onde  $k'(t) = 0$ .*

O Teorema dos Quatro Vértices garante que uma curva fechada regular simples, isto é, sem auto-intersecções, possui pelo menos 4 vértices. Para demonstrarmos este teorema precisaremos de algumas definições preliminares, do Teorema do Índice de Rotação e de um Lema.

Seja  $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva plana fechada dada por comprimento de arco  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ . Como  $s$  é o comprimento de arco, o vetor tangente  $t(s) = (x'(s), y'(s))$  é unitário. Convém introduzir a indicatriz tangente  $t : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $t(s) = (x'(s), y'(s))$ ; esta é uma curva diferenciável cujo traço está contido em um círculo de raio 1. Observe que o vetor velocidade da indicatriz tangente é

$$\frac{dt}{ds} = t'(s) = (x''(s), y''(s)) = \alpha''(s) = kn$$

onde  $n$  é o vetor normal e  $k$  é a curvatura de  $\alpha$ . Seja  $\theta(s)$ ,  $0 < \theta(s) < 2\pi$ , o ângulo que  $t(s)$  faz com o eixo  $Ox$ , isto é,  $x'(s) = \cos\theta(s)$ ,  $y'(s) = \sin\theta(s)$ . Como

$$\theta(s) = \arctan \frac{y'(s)}{x'(s)}$$

$\theta = \theta(s)$  está bem definida localmente como uma função diferenciável (isto é, está bem

definida em um pequeno intervalo em torno de cada  $s$  tal que  $\theta(s) \neq \frac{\pi}{2}$  e  $\theta(s) \neq \frac{3\pi}{2}$  e, nesses pontos, é suficiente considerar um outro sistema de coordenadas) e, além disso

$$\frac{d}{ds}t = \frac{d}{ds}(\cos\theta, \sin\theta) = \theta'(-\sin\theta, \cos\theta) = \theta'n.$$

Anteriormente, vimos que  $\frac{dt}{ds} = kn$ , logo  $\theta'(s) = k(s)$  e isto sugere a definição de uma função global diferenciável  $\theta : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  obtida da integração abaixo.

$$\int_0^s \theta'(s)ds = \int_0^s k(s)ds \iff \theta(s) - \theta(0) = \int_0^s k(s)ds \iff \theta(s) = \int_0^s k(s)ds + \theta(0)$$

Como  $\theta' = k = \langle t', n \rangle = x'y'' - x''y' = \left(\arctan \frac{y'}{x'}\right)'$ , esta função global coincide, a menos de constante ( $\theta'(0)$ ), com a função local  $\theta$  definida previamente. Intuitivamente,  $\theta(s)$  mede a rotação do vetor tangente, isto é, o ângulo total descrito pelo ponto  $t(s)$  da indicatriz tangente, à medida que percorremos a curva  $\alpha$  de 0 a  $s$ . Como  $\alpha$  é fechada, este ângulo é um múltiplo inteiro  $I$  de  $2\pi$ , ou seja,

$$\int_0^l k(s)ds = \theta(l) - \theta(0) = 2\pi I.$$

O número inteiro  $I$  é chamado de índice de rotação de da curva  $\alpha$ . Observe que, o índice de rotação muda de sinal de acordo com a orientação.

**Teorema 5** (Índice de Rotação). *O índice de rotação de uma curva fechada simples é  $\pm 1$ , onde o sinal depende da orientação da curva.*

*Demonstração.* Considere uma reta que não intersecta a curva  $\beta$ , desloque-a paralelamente até que tangencie à curva na primeira vez. Denote por  $l$  esta posição da reta e por  $p$  o ponto de tangência da curva com  $l$ . Como a curva  $\beta$  é fechada, temos que a curva está inteiramente contida em um dos lados de  $l$ . Tome uma reparametrização  $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  de forma que  $\alpha(0) = p$ . Seja

$$T = \{(t_1, t_2) \in [0, l] \times [0, l]; 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq l\}$$

um triângulo com vértices  $A = (0, 0)$ ,  $B = (0, l)$ ,  $C = (l, l)$ .

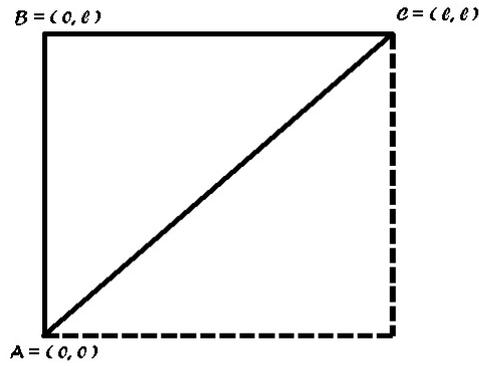


Figura 3.1: Triângulo T, [3]

Defina também uma "aplicação secante"  $\psi : T \rightarrow S^1$  por:

$$\begin{cases} \psi(t_1, t_2) = \frac{\alpha(t_2) - \alpha(t_1)}{\|\alpha(t_2) - \alpha(t_1)\|}, \text{ para } t_1 \neq t_2, (t_1, t_2) \in T - \{(0, l)\} \\ \psi(t, t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \text{ para } t_1 = t_2, (t_1, t_2) \in T \\ \psi(0, l) = -\frac{\alpha'(0)}{\|\alpha'(0)\|}, \text{ para } t_1 = 0 \text{ e } t_2 = l, (t_1, t_2) \in T \end{cases}$$

A curva  $\alpha$  é regular e isto implica que  $\psi$  é contínua. Note que  $\psi$  restrita ao lado AC é a aplicação tangente  $\alpha'$ , cujo grau é o índice de rotação de  $\alpha$  (para maiores informações, consultar [3] capítulo 5.7). Além disso, a aplicação tangente é homotópica à restrição de  $\psi$  aos lados AB e BC. De fato, basta considerar, por exemplo, a homotopia  $\alpha_t : AC \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que

$$\alpha_t(x, x) = \begin{cases} (x, x) + tx(-1, 1), & \text{se } 0 \leq x < \frac{l}{2} \\ (x, x) + t(l-x)(-1, 1), & \text{se } \frac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases}$$

Para  $t = 0$ , temos

$$\alpha_0(x, x) = \begin{cases} (x, x) & \text{se } 0 \leq x < \frac{l}{2} \\ (x, x), & \text{se } \frac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases}$$

cuja imagem é, justamente, o lado AC,  $\alpha_0(AC) = AC$ . Para  $t = 1$

$$\alpha_1(x, x) = \begin{cases} (0, 2x) & \text{se } 0 \leq x < \frac{l}{2} \\ (2x - l, l) & \text{se } \frac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases}$$

cuja imagem para  $0 \leq x < \frac{l}{2}$  é o lado AB e, para  $\frac{l}{2} \leq x \leq l$  é o lado BC. Além disso,  $\alpha_t$  é composta de duas funções contínuas que se colam continuamente na fronteira. De fato,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{l}{2}^-} \alpha_t(x, x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{l}{2}^+} \alpha_t(x, x) \\ \iff \lim_{x \rightarrow \frac{l}{2}^-} (x - tx, x + tx) &= \lim_{x \rightarrow \frac{l}{2}^+} (x + t(l - x)(-1), x + t(l - x)) \\ \iff \left( \frac{l}{2} - t\frac{l}{2}, \frac{l}{2} + t\frac{l}{2} \right) &= \left( \frac{l}{2} - t\frac{l}{2}, \frac{l}{2} + t\frac{l}{2} \right) \end{aligned}$$

Assim, é suficiente mostrar que o grau da aplicação  $\psi$  restrita aos lados AB e BC é  $\pm 1$ . Suponha que as orientações do plano e da curva, no sentido anti-horário, sejam tais que o ângulo orientado de  $\alpha'(0)$  a  $-\alpha'(0)$  seja  $\pi$ . Então a restrição de  $\psi$  a AB, ou seja,  $\psi(0, t) = \frac{\alpha(t) - \alpha(0)}{\|\alpha(t) - \alpha(0)\|}$ , cobre metade de  $S^1$  na direção positiva, conforme figura abaixo

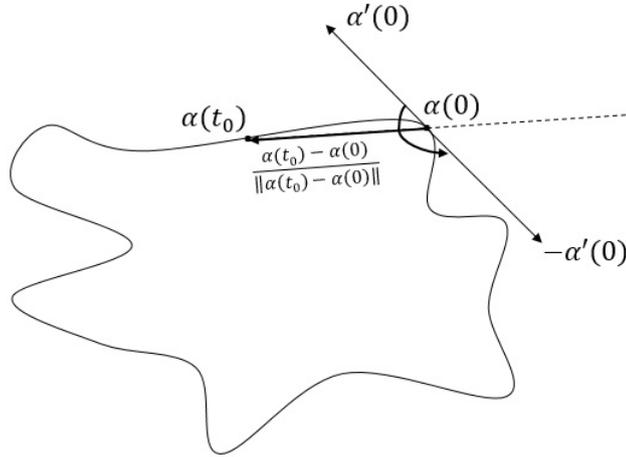


Figura 3.2:  $\psi$  restrita a AB

E a restrição de  $\psi$  a BC, isto é  $\psi(t, l) = \frac{\alpha(l) - \alpha(t)}{\|\alpha(l) - \alpha(t)\|}$  cobre, também na direção positiva, a outra metade, conforme mostra a figura abaixo:

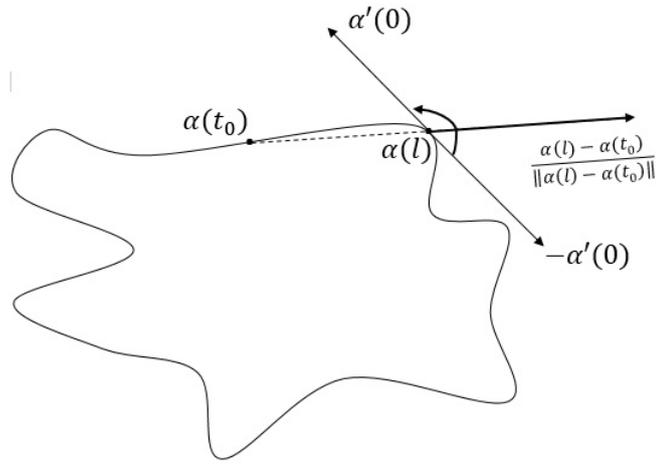


Figura 3.3:  $\psi$  restrita a BC

Como  $\psi$  restrita a AB cobre metade de  $S^1$  e  $\psi$  restrita a BC cobre a outra metade de  $S^1$ , temos  $\pi + \pi = 2\pi$ , ou seja, o índice de rotação é  $+1$ . Se invertermos a orientação, obtemos  $-1$  para este grau.  $\square$

Antes de demonstrarmos o resultado principal deste capítulo, precisaremos do seguinte lema.

**Lema 1.** *Seja  $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva plana fechada, parametrizada por comprimento de arco, e sejam  $A, B$  e  $C$  números reais arbitrários. Então:*

$$\int_0^l (Ax + By + C) \frac{dk}{ds} ds = 0$$

em que as funções  $x = x(s)$ ,  $y = y(s)$  são dadas por  $\alpha(s) = (x(s), y(s))$  e  $k(s)$  é a curvatura de  $\alpha$  em  $s$ .

*Demonstração.* Recorde (primeiro parágrafo deste capítulo) que existe uma função diferenciável  $\theta : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $x'(s) = \cos\theta$ ,  $y'(s) = \sin\theta$ , além disso,  $k(s) = \theta'(s)$  e  $x'' = -ky'$ ,  $y'' = kx'$ .

Portanto, como a curva é fechada, as funções coordenadas  $x(s)$ ,  $y(s)$  e suas derivadas coincidem em  $0$  e  $l$  e disso segue que  $\int_0^l k'(s) ds = 0$ ,  $xk \Big|_0^l = 0$  e  $yk \Big|_0^l = 0$ . Da segunda identidade, temos

$$\begin{aligned}
xk \Big|_0^l = 0 &\Rightarrow \int_0^l (xk)' ds = 0 \\
&\Rightarrow \int_0^l x'k + xk' ds = 0 \\
&\Rightarrow \int_0^l x'k ds + \int_0^l xk' ds = 0 \\
&\Rightarrow \int_0^l xk' ds = - \int_0^l x'k ds.
\end{aligned}$$

Além disso, como  $x'k = y''$  então temos que

$$\int_0^l xk' ds = - \int_0^l x'k ds = - \int_0^l y'' ds = 0.$$

Analogamente, faz-se para  $yk \Big|_0^l = 0$ , resultando em

$$\int_0^l yk' ds = - \int_0^l y'k ds = \int_0^l x'' ds = 0.$$

Portanto, mostramos que  $\int_0^l xk'(s) ds = \int_0^l yk'(s) ds = \int_0^l k'(s) ds = 0$  e temos o lema. □

Finalmente estamos prontos para o resultado principal deste capítulo, o Teorema dos Quatro Vértices.

**Teorema 6** (Teorema dos Quatro Vértices). *Uma curva simples, convexa e fechada tem pelo menos quatro vértices.*

*Demonstração.* Seja  $\alpha : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$  a parametrização da curva por comprimento de arco. Como  $k = k(s)$  é uma função contínua sobre o intervalo  $[0, l]$ , ela atinge um máximo e um mínimo neste intervalo. Portanto  $\alpha$  tem pelo menos dois vértices,  $\alpha(s_1) = p$  e  $\alpha(s_2) = q$ . Seja  $L$  a reta passando por  $p$  e  $q$ , e sejam  $\beta$  e  $\gamma$  os dois arcos de  $\alpha$  determinados pelos pontos  $p$  e  $q$ .

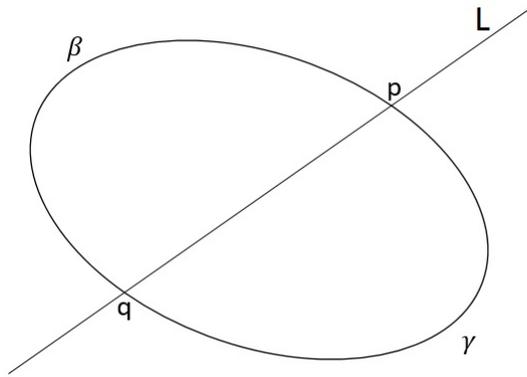


Figura 3.4: Curva  $\alpha$ , [3]

Afirmamos que cada um destes arcos está contido em um dos lados de  $L$ . Caso contrário a curva intersecta  $L$  em um ponto  $r$  distinto de  $p$  e  $q$ .

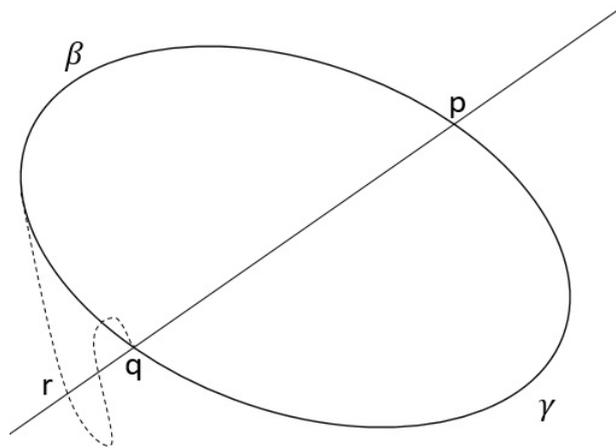


Figura 3.5:  $\alpha$  intersectada por  $L$  em três pontos distintos, [3]

Devido a convexidade e como  $p$ ,  $q$  e  $r$  são pontos distintos de  $\alpha$ , a reta tangente no ponto intermediário, que sem perda de generalidade suponha que seja  $q$ , tem que coincidir com  $L$ , pois, caso contrário, a reta tangente no ponto  $q$  separaria  $r$  e  $p$  em semiplanos distintos, contradizendo a convexidade. Além disso, também pela convexidade, se  $L$  é tangente à  $q$  e corta  $r$  e  $p$ , então só pode ser tangente a  $r$  e  $p$  também.

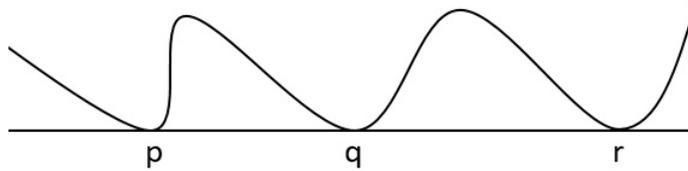


Figura 3.6: Reta  $L$  tangente à  $p$ ,  $q$  e  $r$ , [3]

No caso de  $L$  ser tangente a  $p$ ,  $q$  e  $r$  (com  $q$  como ponto intermediário), poderíamos tomar a reta tangente de um ponto próximo de  $q$  e teríamos  $p$  e  $r$  em lados distintos, conforme a figura, a não ser que todo o segmento  $rq$  da reta  $L$  estivesse contido em  $\alpha$ , isto então implicaria que  $k = 0$  em  $p$  e  $q$ , como estes são pontos de máximo e mínimo para  $k$ , teríamos  $k \equiv 0$  em  $\alpha$ , que é uma contradição. Portanto a reta  $L$  divide a curva em dois arcos e estes estão contidos unicamente em um dos semiplanos definidos por  $L$ .

Seja  $Ax + By + C = 0$  a equação da reta  $L$ . Se não há outros vértices,  $k'(s)$  mantém um sinal constante em cada um dos arcos  $\beta$  e  $\gamma$ . Podemos ajustar os sinais de todos os coeficientes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  de modo que a integral apresentada no Lema demonstrado anteriormente, seja positiva, o que gera uma contradição, mostrando que deve existir um terceiro vértice e que  $k'(s)$  muda de sinal em  $\beta$  ou em  $\gamma$ , digamos em  $\beta$ . Como  $p$  e  $q$  são pontos de máximo e mínimo,  $k'(s)$  muda de sinal duas vezes em  $\beta$ . Logo existe um quarto vértice.

□

# Capítulo 4

## A Fórmula de Cauchy-Crofton

As referências deste capítulo são [3] e [1] sobre a teoria da medida. O objetivo deste capítulo é demonstrar a fórmula de Cauchy-Crofton da teoria de curvas planas. Este teorema mede o tamanho do conjunto de retas que interceptam uma determinada curva plana. Para enunciar este teorema, precisamos antes definir uma medida no conjunto das retas no plano. Faremos isso a seguir.

**Definição 14.** *Uma reta qualquer do plano pode ser definida usando-se dois parâmetros, chamaremos de  $p$  e  $\theta$ . O parâmetro  $p$  é a distância da reta à origem do sistema de coordenadas cartesianas e o parâmetro  $\theta$  é o ângulo formado pelo eixo  $Ox$  e o segmento que realiza a distância  $p$ , conforme a figura abaixo.*

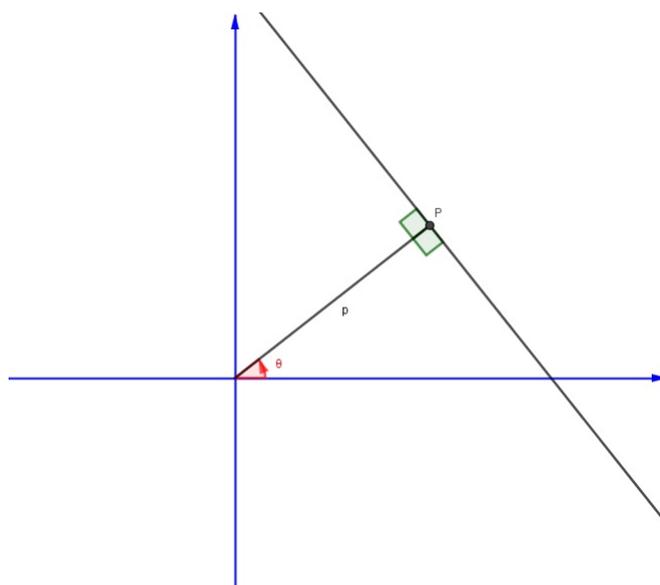


Figura 4.1: Reta parametrizada por  $p$  e  $\theta$ , [3]

Portanto o conjunto das retas do plano pode ser representado da seguinte forma

$$\mathcal{L} = \{(p, \theta) \in \mathbb{R}^2; p \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi\}.$$

A equação da reta, em termos dos parâmetros  $p$  e  $\theta$ , é  $x \cos \theta + y \sin \theta = p$ .

Seja  $C$  uma curva plana regular, seja  $S \subset \mathcal{L}$  o conjunto das retas que intersectam  $C$ , com multiplicidade, isto é, as retas de  $S$  que intersectam  $C$  em dois pontos, por exemplo, dizemos que essas retas têm multiplicidade 2. Definimos uma medida sobre a  $\sigma$ -álgebra dos borelianos em  $\mathcal{L}$  como

$$\iint_S n(p, \theta) dp d\theta$$

Verifiquemos que de fato é uma medida:

(i)  $\mu(\phi) = \iint_{\phi} n(p, \theta) dp d\theta$ , como a região à ser integrada é vazia, temos que  $\mu(\phi) = 0$

(ii)  $\mu(E) \geq 0, \forall E \in \mathcal{L}$ ; De fato, como  $n(p, \theta) \geq 0$ , temos que  $\mu(E) \geq 0, \forall E \in \mathcal{L}$ .

(iii)  $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \iint_{\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k} n(p, \theta) dp d\theta$

como são todas regiões disjuntas e  $n(p, \theta) \geq 0$ , vale que

$$\iint_{\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k} n(p, \theta) dp d\theta = \iint_{E_1} n(p, \theta) dp d\theta + \iint_{E_2} n(p, \theta) dp d\theta + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$$

**Definição 15.** Um movimento rígido em  $\mathbb{R}^2$  é uma aplicação  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $(\bar{x}, \bar{y}) \mapsto (x, y)$ , em que

$$\begin{cases} x = a + \bar{x} \cos \phi - \bar{y} \sin \phi \\ y = b + \bar{x} \sin \phi + \bar{y} \cos \phi \end{cases}$$

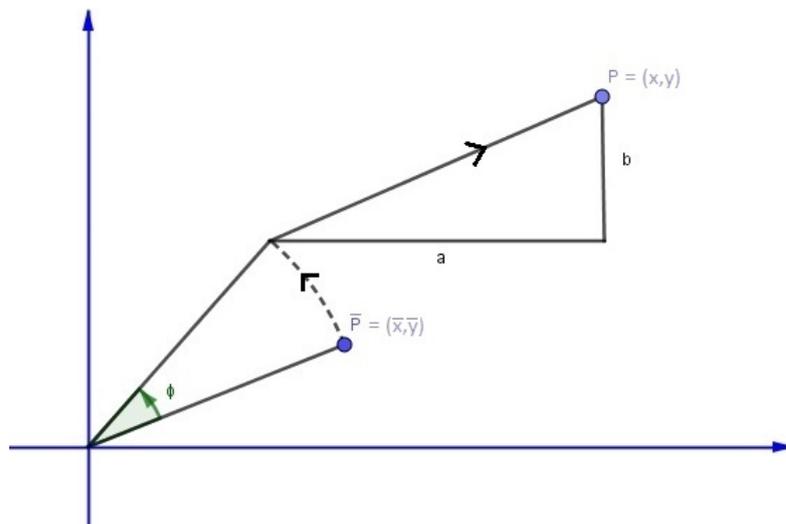


Figura 4.2: Movimento Rígido F, [3]

O movimento rígido F leva a reta  $x\cos(\theta) + y\sen(\theta) = p$  sobre a reta

$$\bar{x}\cos(\theta - \phi) + \bar{y}\sen(\theta - \phi) = p - a\cos(\theta) - b\sen(\theta).$$

De fato, aplicando a transformação F sobre a reta  $x\cos(\theta) + y\sen(\theta) = p$ , temos que

$$(a + \bar{x}\cos(\phi) - \bar{y}\sen(\phi))\cos(\theta) + (b + \bar{x}\sen(\phi) + \bar{y}\cos(\phi))\sen(\theta) = p$$

$$\iff$$

$$\bar{x}\cos(\phi)\cos(\theta) + \bar{x}\sen(\phi)\sen(\theta) + \bar{y}\cos(\phi)\sen(\theta) - \bar{y}\sen(\phi)\cos(\theta) = p - a\cos(\theta) - b\sen(\theta)$$

$$\iff$$

$$\bar{x}\cos(\theta - \phi) + \bar{y}\sen(\theta - \phi) = p - a\cos(\theta) - b\sen(\theta)$$

Portanto a transformação induzida T de F sobre  $\mathcal{L}$  é

$$\begin{cases} \bar{p} = p - a\cos(\theta) - b\sen(\theta) \\ \bar{\theta} = \theta - \phi \end{cases}$$

Seja  $f(x, y)$  uma função contínua definida em  $\mathbb{R}^2$ . Para um conjunto qualquer  $S \subset \mathbb{R}^2$ , defina a área  $A_f$  de S por

$$A_f(S) = \iint_S f(x, y) dx dy.$$

Dizemos que  $A_f$  é invariante por movimentos rígidos se  $S$  é um conjunto qualquer  $\bar{S} = T^{-1}(S)$ , em que  $T$  é a aplicação induzida por um movimento rígido  $F$  qualquer então

$$A_f(\bar{S}) = \iint_{\bar{S}} f(\bar{x}, \bar{y}) dx dy = \iint_S f(x, y) dx dy = A_f(S).$$

**Teorema 7.** *Suponha que  $A_f$  seja invariante por movimento rígido então  $f(x, y) =$  constante.*

*Demonstração.* A fórmula para mudança de variáveis em integrais duplas é

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \iint_{\bar{S}} f(x(\bar{x}, \bar{y}), y(\bar{x}, \bar{y})) \frac{\partial(x, y)}{\partial(\bar{x}, \bar{y})} d\bar{x} d\bar{y}. \quad (4.1)$$

Na equação acima,  $x = x(\bar{x}, \bar{y})$  e  $y = y(\bar{x}, \bar{y})$  são funções com derivadas parciais contínuas que definem uma mudança de variáveis  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\bar{S} = T^{-1}(S)$  e  $\frac{\partial(x, y)}{\partial(\bar{x}, \bar{y})} =$

$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} \\ \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} \end{vmatrix}$  é o (determinante) Jacobiano da transformação  $T$  que é igual a

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\bar{x}, \bar{y})} = \begin{vmatrix} 1 & a \operatorname{sen}(\theta) - b \operatorname{cos}(\theta) \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Utilizando este fato na equação 4.1, obtemos

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \iint_{\bar{S}} f(x(\bar{x}, \bar{y}), y(\bar{x}, \bar{y})) d\bar{x} d\bar{y}.$$

Além disso, por hipótese, vale que

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \iint_{\bar{S}} f(\bar{x}, \bar{y}) dx dy.$$

e isto implica que

$$\iint_{\bar{S}} f(x(\bar{x}, \bar{y}), y(\bar{x}, \bar{y})) d\bar{x} d\bar{y} = \iint_{\bar{S}} f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y}$$

$\iff$

$$\iint_{\bar{S}} f(x(\bar{x}, \bar{y}), y(\bar{x}, \bar{y})) - f(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y} = 0.$$

Então  $G(\bar{x}, \bar{y}) = f(x(\bar{x}, \bar{y}), y(\bar{x}, \bar{y})) - f(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ , caso contrário existiria  $q$  pertencente ao domínio de  $G$  tal que  $G(q) \neq 0$ , sem perda da generalidade, suponha  $G(q) > 0$ , como  $G(\bar{x}, \bar{y})$  é contínua (pois  $f$  é contínua), existe um aberto  $\bar{S} \subset \mathbb{R}^2$  com  $q \in \bar{S}$ , tal que se  $r \in \bar{S}$  então  $G(r) > 0$  e, com isso,  $\iint_{\bar{S}} G(r) d\bar{x}d\bar{y} > 0$ , contradição. Portanto vale para  $S$  arbitrário que

$$f(x(\bar{x}, \bar{y}), y(\bar{x}, \bar{y})) = f(x, y).$$

Como tomamos pontos quaisquer e sempre existe um movimento rígido que leva um ponto em outro, temos

$$f(x, y) = (f \circ F)(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{x}, \bar{y})$$

e isto vale para todos os pontos  $(x, y)$  e  $(\bar{x}, \bar{y})$ . Então  $f(x, y) = \text{constante}$ , como queríamos.  $\square$

Agora estamos prontos para a demonstração do teorema principal deste capítulo.

**Teorema 8** (Fórmula de Cauchy-Crofton). *Seja  $C$  uma curva regular plana de comprimento  $l$ . A medida do conjunto de retas (contadas com multiplicidade) que intersectam  $C$  é igual a  $2l$ .*

*Demonstração.* Dividiremos a demonstração em 3 partes (casos). Na primeira parte é considerado que  $C$  é um segmento de reta, na segunda parte consideramos  $C$  como uma poligonal e a terceira parte  $C$  é uma curva plana qualquer de comprimento  $l$ .

### 1ª Parte:

Suponha que a curva  $C$  seja um segmento de reta com comprimento  $l$ .

A medida do conjunto de retas que intersectam  $C$  é:

$$\iint n(p, \theta) dp d\theta$$

com  $n(p, \theta)$  o número de pontos de intersecção da reta  $(p, \theta)$  com  $C$ .

Como  $C$  é um segmento de reta,  $n(p, \theta) = 1$  para todo  $(p, \theta)$  e pelo Teorema 8 esta medida é invariante por movimentos rígidos neste caso. Como nossa medida é invariante por movimentos rígidos, podemos transladar e rotacionar  $C$  até que o ponto médio de  $C$  esteja sob a origem do sistema de coordenadas cartesianas e, além disso, paralela ao eixo  $Ox$ .

Para estabelecer os intervalos de integração, verifique que para todo  $0 < \theta < 2\pi$  existe

uma reta que corta  $C$ . Além disso, sabemos, de antemão, que  $p \geq 0$ , então 0 é nosso limite inferior de integração, para determinarmos o limite superior de integração para  $p$ , observe a imagem abaixo:

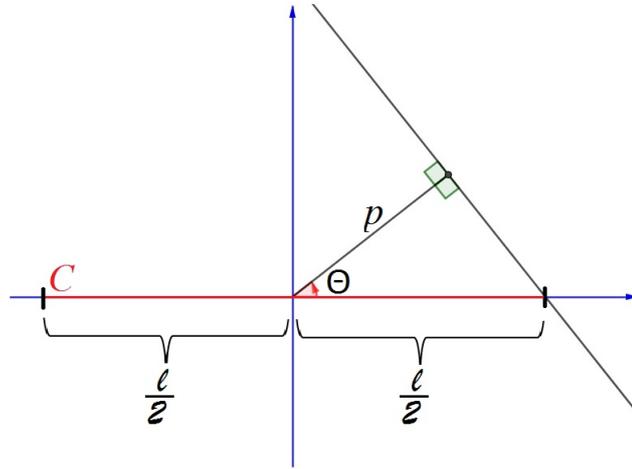


Figura 4.3: Segmento de reta de comprimento 1, [3]

Vale que  $p = \frac{l}{2} |\cos(\theta)|$  já que  $p$  é sempre positivo e alcança seu maior valor quando  $\cos(\theta) = 1$

Portanto, a medida do conjunto é

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{l}{2}|\cos(\theta)|} 1 dp d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{l}{2} |\cos(\theta)| d\theta = \frac{l}{2} \int_0^{2\pi} |\cos(\theta)| d\theta.$$

Como o integrando é uma função cosseno e, dentro deste intervalo de integração de 0 a  $2\pi$  o cosseno varia seu sinal em positivo (1º e 4º quadrante) e negativo (2º e 3º quadrante), podemos dividir essa integral em três situações:

$$(i) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) d\theta = \text{sen}(\theta) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \text{sen}(0) = 1$$

$$(ii) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} -\cos(\theta) d\theta = -\text{sen}(\theta) \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} = -\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$$

$$(iii) \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \cos(\theta) d\theta = \text{sen}(\theta) \Big|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} = \text{sen}(2\pi) - \text{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 1$$

Logo,

$$\frac{l}{2} \int_0^{2\pi} |\cos(\theta)| d\theta = \frac{l}{2} (1 + 2 + 1) = \frac{4l}{2} = 2l.$$

### 2ª Parte:

Considere que  $C$  seja uma curva poligonal composta por um número finito de segmentos  $C_i$  cada um com um comprimento  $l_i$ , de modo que  $\sum l_i = l$ . Pela 1ª Parte, temos que a medida, quando  $C$  era um segmento, é  $\iint 1 dp d\theta$ . Agora que  $C$  é uma poligonal, que é constituída de um número finito de segmentos e nossa medida é invariante por movimentos rígidos em cada segmento, podemos reduzir esse caso ao caso anterior (tomando cada segmento da poligonal, trasladando-o e rotacionando-o de modo que fique paralelo ao eixo  $Ox$ ). Fazendo como na 1ª Parte para cada segmento que compõe a poligonal  $C$ , temos:

$$\iint n(p, \theta) dp d\theta = \sum_{i=0}^m \iint_{C_i} 1 dp d\theta = \sum_{i=0}^m 2l_i = 2 \sum_{i=0}^m l_i = 2l$$

### 3ª Parte:

Resta provar o caso em que  $C$  é uma curva regular qualquer. Para isso usaremos a 2ª Parte. Tomando uma poligonal de pontos de  $C$  que aproxima à curva  $C$ , aplicando-se o limite com relação à quantidade de segmentos que compõe a poligonal ( $m \rightarrow \infty$ , com  $m$  o número de segmentos), temos que

$$\iint n(p, \theta) dp d\theta = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m \left( \iint dp d\theta \right)$$

Ou seja, à medida que aumentamos o quantidade de segmentos da poligonal de pontos de  $C$ , melhor é a aproximação uma vez que  $\alpha$  é uma curva regular e portanto esta integral converge. Deste modo, podemos usar as ideias da 2ª Parte

$$\iint n(p, \theta) dp d\theta = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m \left( \iint dp d\theta \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m 2l_i = 2 \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^m l_i = 2 \lim_{m \rightarrow \infty} l = 2l$$

□

# Considerações Finais

O estudo da Geometria Diferencial Global pode ser discutido em regiões mais gerais e em dimensões maiores. Este estudo se relaciona com diversas áreas da matemática moderna como a Geometria Riemanniana e os Sistemas Dinâmicos.

A desigualdade isoperimétrica é um resultado satisfatoriamente amplo, que abarca todas as curvas fechadas de mesmo perímetro, garantindo que a circunferência é a curva fechada que cerca a maior área.

O Teorema dos quatro vértices, estudado nesse trabalho, garante que dada uma curva fechada regular simples, isto é, sem auto-intersecções, então a derivada da função curvatura desta curva possui pelo menos 4 pontos críticos, o que estabelece um critério muito importante para o Teorema Fundamental das Curvas Planas - TFCP, pois um dos itens do TFCP garante que dada uma função diferenciável  $k$ , existe uma curva  $\alpha$  tal que  $k$  é a função curvatura de  $\alpha$ , mas sabendo do Teorema dos Quatro Vértices, temos que para que uma função diferenciável seja a curvatura de uma curva fechada regular simples  $\beta$ , necessariamente, essa função deve possuir pelo menos quatro pontos críticos.

Por fim, a Fórmula de Cauchy-Crofton garante que dada uma curva regular de comprimento  $l$ , a medida do conjunto de retas que intersectam essa curva é igual a duas vezes o seu comprimento.

Uma proposta de estudos futuros interessante seria analisar a validade, ou relação, dos resultados abordados neste trabalho com outros teoremas para superfícies ou variedades de maiores dimensões. Além disso, uma proposta de continuidade dos estudos interessante caminha em direção a Geometria Riemanniana, que trata de variedades de uma forma mais geral.

# Referências Bibliográficas

- [1] BARTLE, R. G. *The elements of integration and lebesgue measure*, 1 ed. New York: John Wiley e Sons, Inc., 1995.
- [2] BOYER, C. *História da Matemática*, 2 ed. São Paulo: Edgar Blücher Ltda., 1996.
- [3] CARMO, M. P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, 4 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.
- [4] EVES, H. *História da Geometria*, 1 ed., vol. 3 of *Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula*. São Paulo: Atual Editora Ltda., 1992.
- [5] LIMA, E. L. *Curso de Análise*, 1 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1976.
- [6] MOREIRA, C.G.T.A; SALDANHA, N. *A desigualdade isoperimétrica*. in: *Revista Matemática Universitária n 15,p.13-19*. Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 1993.
- [7] SOUZA, C. *Dois Demonstrações da Desigualdade Isoperimétrica*. Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG, 2006.
- [8] TENENBLAT, K. *Introdução à Geometria Diferencial*, 2 ed. São Paulo: Edgar Blücher Ltda., 2008.